

# MÁQUINAS TÉRMICAS

---

## Mapas de Operación y Análisis Dimensional

*Prof. Miguel Asuaje*  
*Marzo 2012*

## Contenido

---

- ★ **Operación de las Turbomáquinas Térmicas**
  - ★ Principio de Funcionamiento y Transferencia de energía
  - ★ Ecuaciones Fundamentales
- ★ **Curvas Características o Mapas de operación**
  - ★ Compresor
  - ★ Turbinas
- ★ **Análisis de Desempeño de las Turbomáquinas**
  - ★ Parámetros de análisis de desempeño

## Flujo en un Compresor

Retomemos el funcionamiento



➔ Compresor Centrífugo

## Ecuaciones Fundamentales para el Estudio de las TMT

Ecuación de continuidad



$$\dot{m} = \rho_1 \cdot A_1 \cdot C_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot C_2$$

En el caso de las turbomáquinas térmicas existe un cambio en la densidad del gas cuando existe un cambio en la presión del fluido



# La transferencia de Energía

Con el flujo atravesando el rotor de la máquina...

☛ Cambio de la Cantidad Angular de Movimiento:

¿Cómo ocurre? →

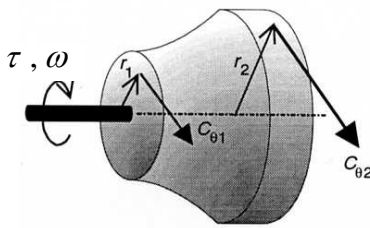
En una Turbomáquina, dicho cambio es compensado con la fuerza transmitida de o a los álabes

¿Cómo describimos este cambio? →

☛ Con la ecuación de Euler para las Turbomáquinas

$$W_x = U_2 \cdot C_{\theta 2} - U_1 \cdot C_{\theta 1}$$

# Ecuación de Euler



$$\tau = \dot{m}(r_1 C_{\theta 1} - r_2 C_{\theta 2})$$

$$W_x = \frac{\tau \omega}{\dot{m}} = \omega(r_1 C_{\theta 1} - r_2 C_{\theta 2})$$

$$U = \omega r$$

Por la Primera Ley de la Termodinámica

$$\Delta h_0 = h_{01} - h_{02} = U_1 C_{\theta 1} - U_2 C_{\theta 2}$$

La ecuación es válida para CUALQUIER TURBOMAQUINA

# La transferencia de Energía

## ▣ Cambio de Trabajo

¿Cuánto Transfiere? →

A partir de la primera ley de la Termodinámica, puedo relacionar el Trabajo realizado con el cambio de energía (cambio de entalpía) en el fluido

Primera ley de la termodinámica

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m} \cdot \left[ (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} \cdot (c_2^2 - c_1^2) + g \cdot (z_2 - z_1) \right]$$

Para flujo compresible

$$\bar{Q} - \bar{W} = (h_2 + \frac{1}{2} c_2^2) - (h_1 + \frac{1}{2} c_1^2) = h_{o2} - h_{o1}$$

Para flujo incompresible

$$\bar{Q} - \bar{W} = \left( \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} c_2^2 \right) - \left( \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} c_1^2 \right) = p_{o2} - p_{o1}$$

Entalpía de Estancamiento:

$$h_2 + \frac{1}{2} c_2^2 = h_{o2}$$

# La Potencia

Ecuación de Euler

$$\dot{W} = (U_2 \cdot c_{\theta 2} - U_1 \cdot c_{\theta 1})$$

Para flujo compresible  $h_{o2} - h_{o1} = (U_2 \cdot c_{\theta 2} - U_1 \cdot c_{\theta 1})$

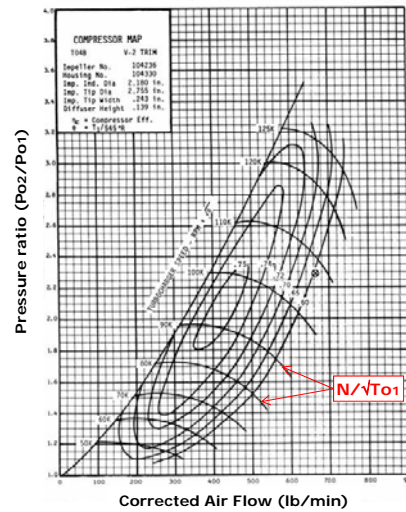
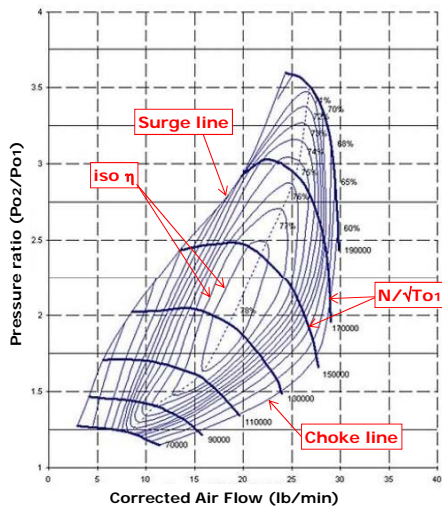
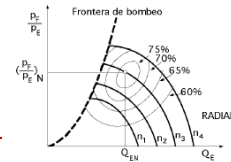
Para flujo incompresible  $\frac{p_{o2} - p_{o1}}{\rho} = (U_2 \cdot c_{\theta 2} - U_1 \cdot c_{\theta 1})$

Ecuación de potencia

$$\dot{P} = \dot{m} \cdot (U_2 \cdot c_{\theta 2} - U_1 \cdot c_{\theta 1})$$

# Los Mapas de Operación

## Mapas de Operación Compresores Centrífugos



# Desempeño Compresores Centrífugos



## Desempeño de una familia de Compresores

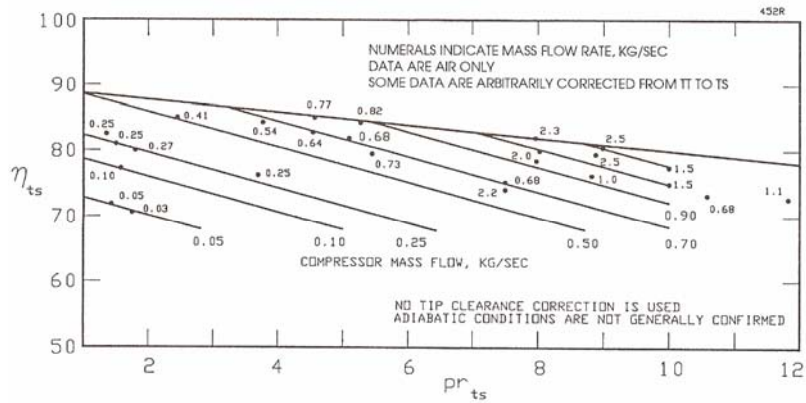


Figure 1.7. State-of-the-art centrifugal compressor performance (adapted from Japikse 1976).

# Rango de Operación. Compresores Centrífugos

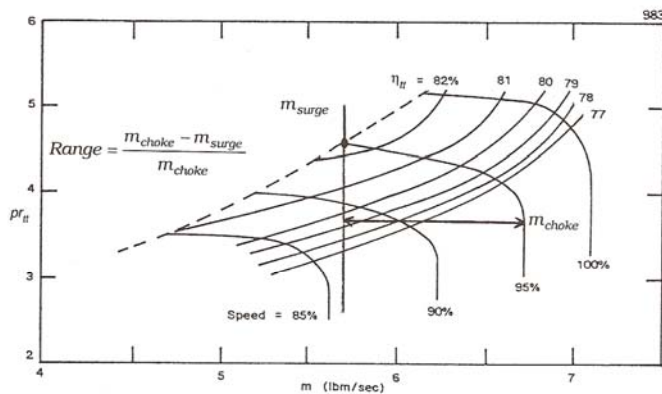


Figure 1.9. Stage map—moderate range, intermediate pressure ratio.



# Rango de Operación. Compresores Centrífugos

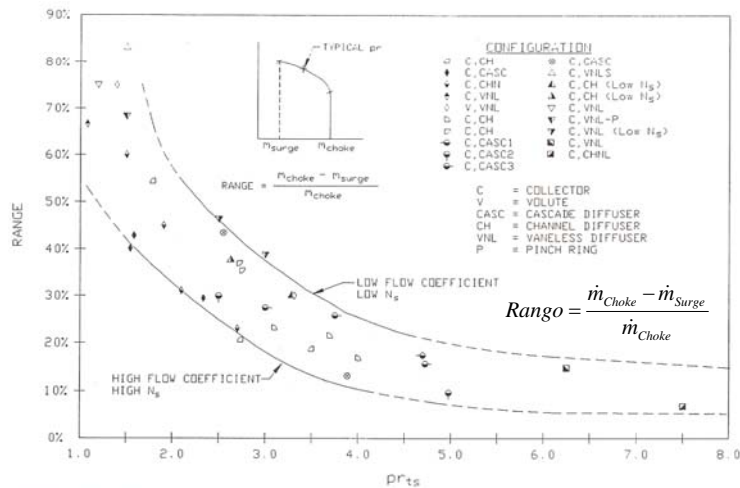
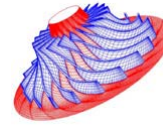


Figure 1.8. Range versus typical pressure ratios for various advanced and various common industrial stages.

# Mapas de Operación Turbinas Radiales

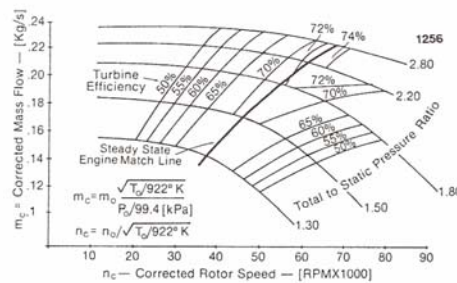
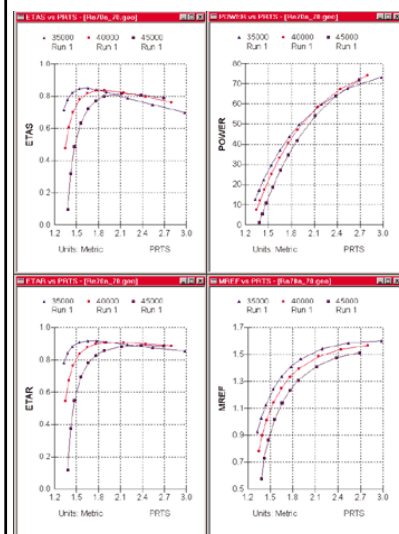
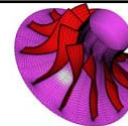


Figure 1.13. Cummins turbine and engine match characteristics (Flynn 1979, reprinted with permission from SAE Paper No. 790314 © 1979 Society of Automotive Engineers, Inc.).

# Rango de Operación. Turbinas Radiales

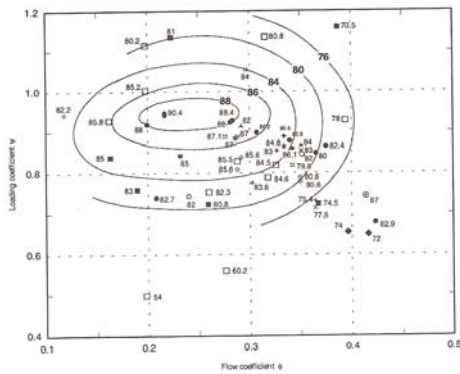


Figure 1.12. Correlation of blade loading and flow coefficients for radial turbines. Data points and contours show total-to-static isentropic efficiency (Chen and Baines 1994).

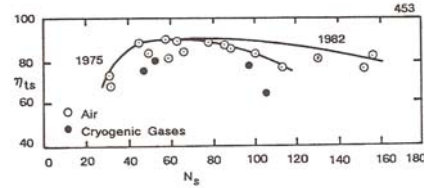
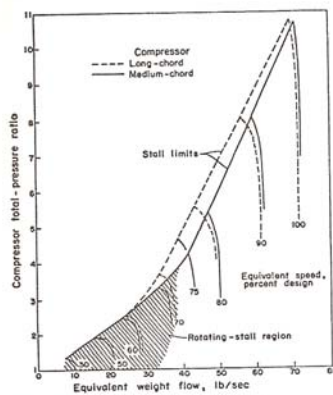
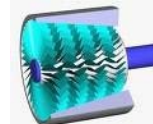
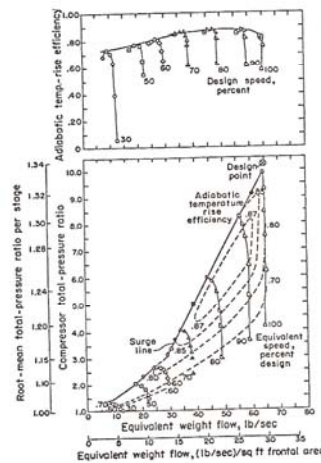


Figure 1.11. Efficiency versus specific speed for radial inflow reaction turbines—state-of-the-art (Japikse 1976).

# Mapas de operación Compresores Axiales



(Data originally in Sievers et al. 1958)

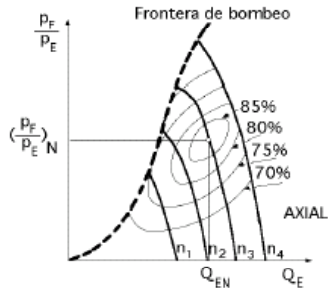


(Data originally in Voit 1953)

Figure 1.17. Typical multistage axial characteristics from NACA studies (Serovy 1966, reprinted with permission of ASME).



# Mapas de operación Compresores Axiales



## Comparación del Rendimiento de los turbocompresores

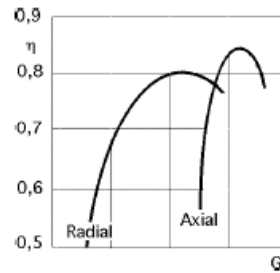
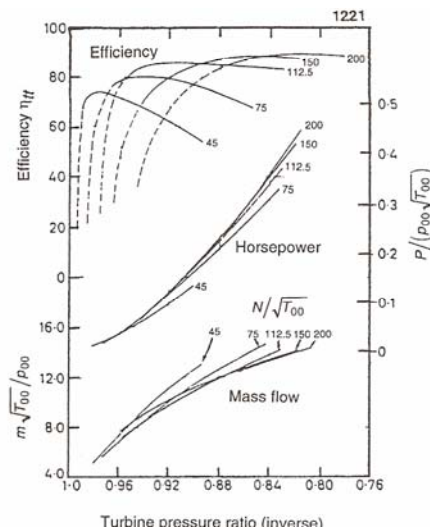
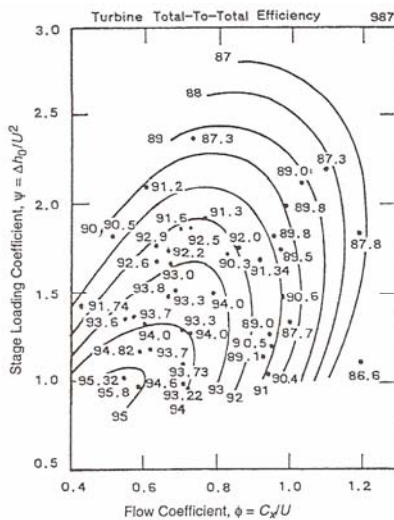
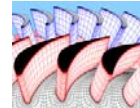


Fig III.2.- Curvas típicas de rendimiento a cargas parciales de un TC: a) radial; b) axial.

# Mapas de operación Turbinas Axiales



# Análisis de Desempeño de las Turbomáquinas

## Métodos de Análisis

¿Cuál es el Problema?



Se quiere predecir el comportamiento de una turbomáquina: bomba, compresor u cualquier otro tipo

¿Qué conocemos?



Características de Operación

$$\dot{m} \left[ \frac{kg}{s} \right]$$

$$\Delta h \text{ ó } \frac{P_2}{P_1} [kJ] \text{ ó } [adim]$$

$$N [rpm]$$

+

Geometría



Métodos Experimentales

Métodos Numéricos:

Métodos 1D

Métodos 2D

Métodos Q-3D

Métodos 3D

# Métodos Experimentales ...

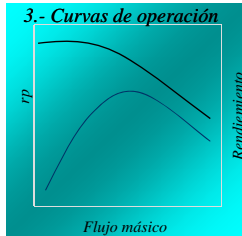
1.-Construcción de un modelo



2.-Ensayos sobre un banco de prueba



3.- Curvas de operación

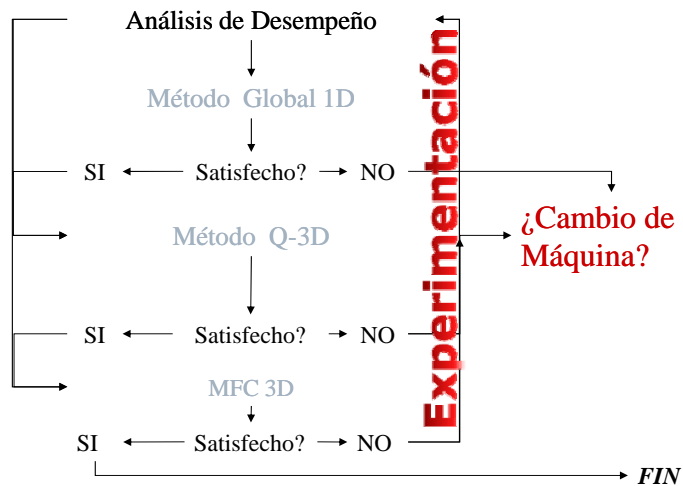
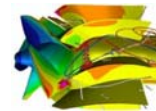


- Curvas de Operación
- Correlaciones Experimentales
- Familias de Máquinas



Algunos Datos: Longitud del ducto de entrada, Tamaño del compresor, Longitud del ducto de salida. Características del compresor

# Procedimiento Integral de Análisis



## Método 1D. (Línea media y experimentales)

### Características de Operación

$$\dot{m} \left[ \frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$$

$$\Delta h \text{ ó } \frac{P_2}{\rho_1} \left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right] \text{ ó } [\text{adim}]$$

$$N \text{ [rpm]}$$

+ Geometría

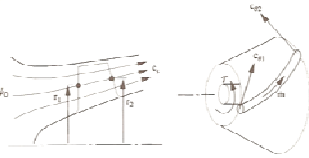
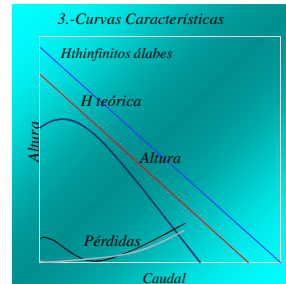
-Cinemática

$$\vec{C} = \vec{W} + \vec{U}$$

$$H_{th} = \frac{U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}}{g}$$

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m} \left( h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1) \right)$$

Correlaciones

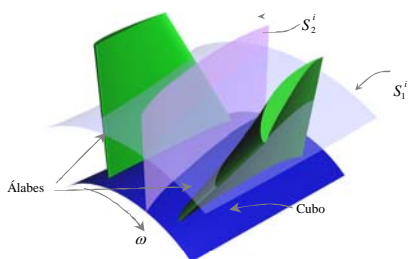


- Selección de parámetros basado
- En resultados experimentales

Compruebo con Ensayos

## Método Quasi- 3D ...

Wu (1952)



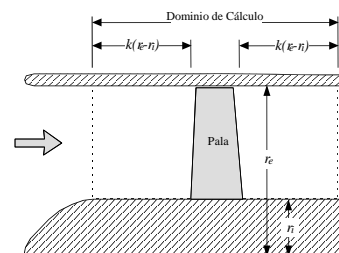
- El flujo se estudia como la superposición de dos planos

Compruebo con Ensayos

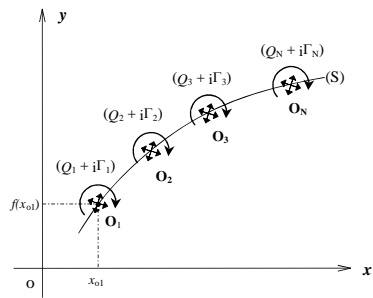
Plano álabe a álabe



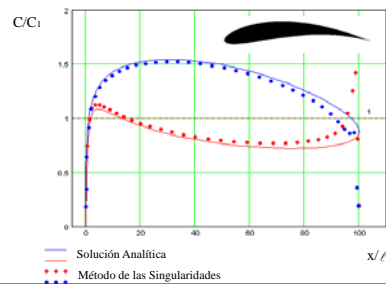
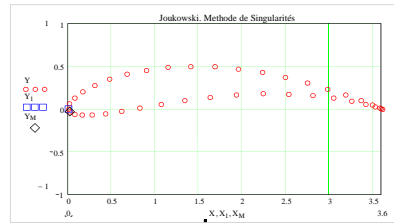
Plano Meridiano



## Plano Álabe a Álabe



Campo de velocidad alrededor de un perfil Joukowski aislado  $b = 0,9$   $\beta = 10^\circ$



## Plano Meridiano

Ecuaciones de Euler :

$$C_r \frac{\partial C_r}{\partial r} + C_z \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{C_u^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r$$

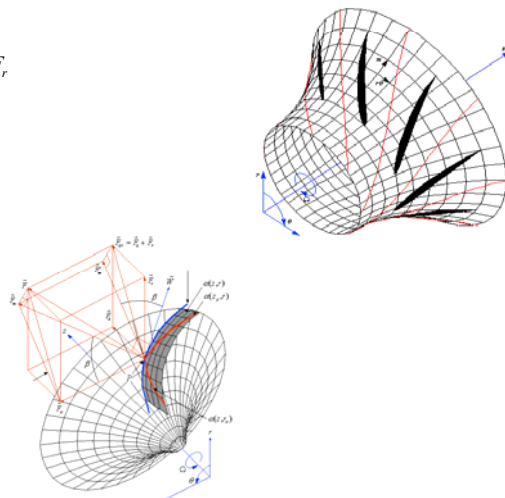
$$C_r \frac{\partial C_u}{\partial r} + C_z \frac{\partial C_u}{\partial z} + \frac{C_r C_u}{r} = F_u$$

$$C_r \frac{\partial C_z}{\partial r} + C_z \frac{\partial C_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z$$

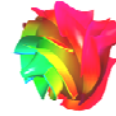
Líneas de corriente:

$$C_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$C_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$



# Métodos 3D ...

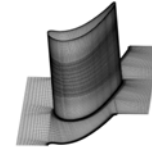


Masa  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{C}) = 0$



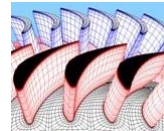
Cambio de Cantidad de Movimiento  $\rho \frac{D\vec{C}}{Dt} = \rho \left[ (\vec{C} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{C} + \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} \right] = -\vec{\nabla} p + \rho g + \vec{\nabla} \cdot \tau_{ij}$

(1) (2) (3) (4) (5) (6)



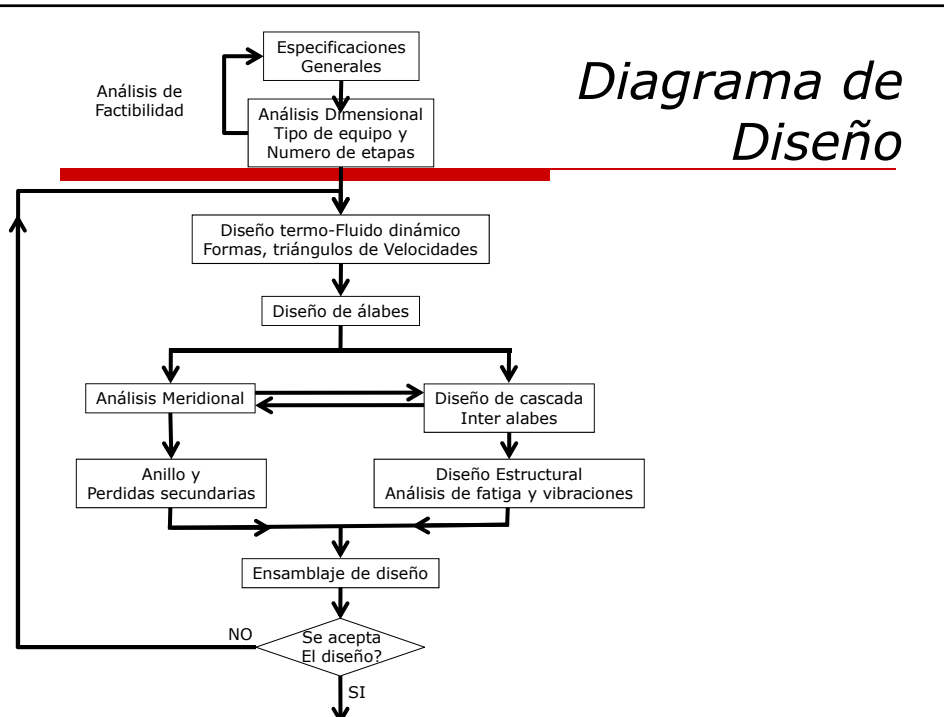
Energía  $\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + \Phi$

Estado  $\frac{p}{\rho} = rT$



Bien que la DFC es como hacer ensayos virtuales, se debe Comprobar con Ensayos

# Diagrama de Diseño



## Experimentación y Análisis Dimensional

---

A través de la experimentación se establecen relaciones entre las diferentes variables de operación y flujo, que permiten determinar expresiones entre caudal, presión, velocidad y potencia.

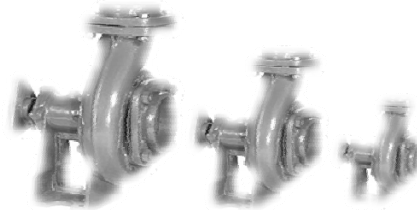
Vista la importancia y obligatoriedad de la experimentación en el análisis y diseño de turbomáquinas, el análisis dimensional permite, entre otros, el uso de equipos experimentales a escala con el objeto de predecir el comportamiento de compresores y turbinas a escala real. Las turbomáquinas pueden compararse entre sí a través del análisis dimensional, del cual se obtienen varios tipos de parámetros geoméricamente similares.

## Experimentación y Análisis Dimensional

---

Además, a través del análisis dimensional se pueden escribir relaciones o expresiones aplicables en el análisis de desempeño y diseño de las turbomáquinas

**Limitación:** no todas las condiciones pueden ser simuladas en el laboratorio y no todos los fenómenos físicos pueden reproducirse a escala menor.



# Análisis Dimensional (AD)

Permite escribir y/o definir un grupo de variables que identifican a un equipo o familia de equipos.

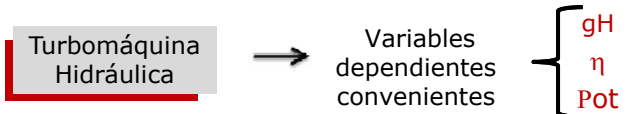
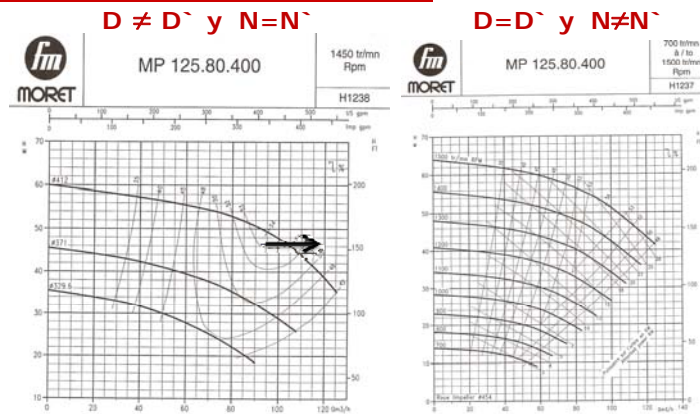
- Ayudan a la comprensión de las Turbomáquinas
- Agrupan las variables involucradas en cada situación física a un número de parámetros más manejable



## Principales usos

- Predicción del funcionamiento de un prototipo con el ensayo de un modelo (**Predicción y/o Análisis de Desempeño**)
- Determinación del tipo apropiado de máquina para condiciones determinadas de operación (**Selección**)

# Análisis Dimensional Aplicación de Similitud en TMH





## Algunos números adimensionales

$$D = \frac{1}{\pi N} \sqrt{\frac{g \Delta H}{\psi}} \rightarrow \text{Relación entre el diámetro y el coeficiente de carga}$$

$$\Omega_s \Leftrightarrow N_s = \frac{\omega \sqrt{Q}}{(g \Delta H)^{3/4}} \rightarrow \text{Velocidad específica (adimensional)}$$

$$N_s = \frac{N(\text{rpm}) \sqrt{Q(\text{gpm})}}{(\Delta H(\text{ft}))^{3/4}} = 2733 \Omega_s \rightarrow \text{Velocidad específica (de uso común) (no-adimensional)}$$

## Leyes de Afinidad para Bombas

- Variación de la curva característica de una misma bomba cuando varía el número de revoluciones (variación moderada)

- D...constante y N...variable

$$\frac{Q'}{Q''} = \frac{n'}{n''} \quad \frac{H'}{H''} = \left(\frac{n'}{n''}\right)^2 \quad \frac{P'}{P''} = \left(\frac{n'}{n''}\right)^3$$

- Dimpulsor...variable y N...constante

$$\frac{Q'}{Q''} = \left(\frac{D'}{D''}\right)^3 \quad \frac{H'}{H''} = \left(\frac{D'}{D''}\right)^2 \quad \frac{P'}{P''} = \left(\frac{D'}{D''}\right)^5$$

## Ejemplo TMH

Después de 25 años de operación, se le cambia la propela a un bote de recreación. La nueva propela tiene 23" de diámetro y la antigua 21". En operación, el nuevo sistema presenta un aumento de 2700 rpm a 2900 rpm. ¿Cuánta potencia adicional se consiguió con la actualización?

$$N_1 = 2700 \text{ rpm} = 282.7 \text{ rad/s}$$

$$D_1 = 21''$$

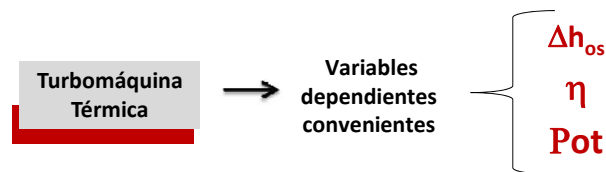
$$N_2 = 2900 \text{ rpm} = 303.7 \text{ rad/s}$$

$$D_2 = 23''$$

$$\Pi_s = \frac{Pot}{\rho N^3 D^5} \longrightarrow 1 = \frac{\frac{Pot_1}{\rho N_1^3 D_1^5}}{\frac{Pot_2}{\rho N_2^3 D_2^5}} = \frac{Pot_1 N_2^3 D_2^5}{Pot_2 N_1^3 D_1^5}$$

$$\frac{Pot_2}{Pot_1} = \frac{N_2^3 D_2^5}{N_1^3 D_1^5} = \frac{303.7^3 23^5}{282.7^3 21^5} = 1.9538 \longrightarrow \text{La potencia aumentó 95.38\%}$$

## Análisis Dimensional en TMT



Cada uno de estos parámetros depende de otras variables:



## Análisis Dimensional

Aplicando el teorema  $\pi$ -Buckingham, las variables en las funciones se reducen a 4 grupos adimensionales:

$$\frac{\Delta h_{0S}}{N^2 \cdot D^2} = f_1 \left[ \frac{\dot{m}}{\rho_{01} \cdot N \cdot D^3}, \frac{\rho_{01} \cdot N \cdot D^2}{\mu}, \frac{N \cdot D}{a_{01}}, \gamma \right]$$

$$\eta = f_2 \left[ \frac{\dot{m}}{\rho_{01} \cdot N \cdot D^3}, \frac{\rho_{01} \cdot N \cdot D^2}{\mu}, \frac{N \cdot D}{a_{01}}, \gamma \right]$$

$$\frac{P}{\rho_{01} \cdot N^3 \cdot D^5} = f_3 \left[ \frac{\dot{m}}{\rho_{01} \cdot N \cdot D^3}, \frac{\rho_{01} \cdot N \cdot D^2}{\mu}, \frac{N \cdot D}{a_{01}}, \gamma \right]$$

En una TMT los valores  $\rho_0$  y  $a_0$  varían durante el paso del fluido por el equipo, por lo tanto se toman los valores de estas **variables a la entrada ( $_{01}$ )** de la máquina.

## Análisis Dimensional

Finalmente obtenemos:

$$\frac{\Delta h_{0S}}{N^2 \cdot D^2}, \eta, \frac{P}{\rho_{01} \cdot N^3 \cdot D^5} = f \left[ \frac{\dot{m}}{\rho_{01} \cdot N \cdot D^3}, \frac{\rho_{01} \cdot N \cdot D^2}{\mu}, \frac{N \cdot D}{a_{01}}, \gamma \right] \quad (1)$$

Donde

$$\frac{\dot{m}}{\rho_{01} \cdot N \cdot D^3} \quad \text{Factor de Flujo } (\phi)$$

$$\frac{\rho_{01} \cdot N \cdot D^2}{\mu} \quad \text{Número de Reynolds (Re)}$$

$$\frac{N \cdot D}{a_{01}} \quad \text{Número de Mach (Ma)}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad \text{Relación de Calores Específicos}$$

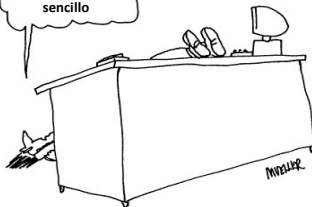
# Análisis Dimensional



Pero.....



Seria mas productivo si fuera mas sencillo



Aunque ya contamos con los parámetros adimensionales fundamentales para el análisis de las turbomáquinas térmicas, podemos intentar simplificarlos y obtener relaciones **equivalentes** más sencillas de manejar y calcular.

Veamos.....

# Factor de Flujo ( $\phi$ )

El factor de flujo se define como:

$$\phi = \frac{\dot{m}}{\rho_{01} \cdot N \cdot D^3}$$

Trabajando un poco esta expresión.....

$$\phi = \frac{\dot{m}}{\rho_{01} \cdot N \cdot D^3} = \frac{\dot{m}}{\rho_{01} \cdot N \cdot D \cdot D^2 \cdot \frac{a_{01}}{a_{01}}} = \frac{\dot{m}}{\rho_{01} \cdot a_{01} \cdot D^2 \cdot \left(\frac{N \cdot D}{a_{01}}\right)}$$

$\frac{N \cdot D}{a_{01}} = Ma$  Ya está siendo considerado en el análisis, por lo tanto puede ser eliminado y nos queda.....

$$\phi = \frac{\dot{m}}{\rho_{01} \cdot a_{01} \cdot D^2}$$

**Pero podemos simplificarla aún más.....**

## Factor de Flujo ( $\phi$ )

Recordando gas ideal y la definición de  $a_{01}$ :  $\rho_{01} = \frac{P_{01}}{R \cdot T_{01}}$   $a_{01} = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_{01}}$

Sustituyendo en la expresión anterior.....

$$\phi = \frac{\dot{m}}{\left(\frac{P_{01}}{R \cdot T_{01}}\right) \cdot \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_{01}} \cdot D^2} = \frac{\dot{m} \cdot R \cdot T_{01}}{P_{01} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \sqrt{R \cdot T_{01}} \cdot D^2} = \frac{\dot{m} \cdot \sqrt{R \cdot T_{01}}}{P_{01} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot D^2}$$

$D^2$  lo podemos eliminar ya que será considerado en otro grupo.  $R$  y  $\gamma$  son **constantes**, por lo tanto también puedo extraerlas para finalmente obtener:

$$\phi = \frac{\dot{m} \cdot \sqrt{T_{01}}}{P_{01}} \quad \leftarrow \text{Equivalentes entre sí pero numéricamente diferentes} \rightarrow \phi = \frac{\dot{m}}{\rho_{01} \cdot N \cdot D^3}$$

No es un número **adimensional**, pero para efectos del análisis de las turbomáquinas térmicas, se asumirá como tal.

Esta aproximación no conlleva a errores en la predicción y/o selección de las turbomáquinas, siempre y cuando seamos congruentes con las referencias que utilizemos.

## Análisis Dimensional

El número de Mach también se puede expresar como:

$$Ma = \frac{N \cdot D}{a_{01}} = \frac{N \cdot D}{\sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_{01}}} \xrightarrow{\text{extrayendo } \gamma \text{ y } R} Ma = \frac{N \cdot D}{\sqrt{T_{01}}} \quad \text{Equivalentes entre sí pero numéricamente diferentes}$$

De esta forma la ecuación (I) nos queda.....

$$\frac{\Delta h_{0S}}{N^2 \cdot D^2} \eta_s \frac{P}{\rho_{01} \cdot N^3 \cdot D^5} = f \left[ \frac{\dot{m} \cdot \sqrt{T_{01}}}{P_{01}}, \frac{\rho_{01} \cdot N \cdot D^2}{\mu}, \frac{N \cdot D}{\sqrt{T_{01}}}, \gamma \right] \quad (II)$$

Sin embargo, estos términos deben ser re-escritos basados en los parámetros característicos de las TMT: Relación de compresión o expansión y el cambio de temperatura

## Análisis Dimensional

Ahora simplifiquemos el lado izquierdo de la ecuación II:

Empecemos trabajando  $\Psi = \frac{\Delta h_{0s}}{N^2 \cdot D^2}$        $\Psi$ ... Factor de Carga

$$\Delta h_{0s} = C_p \cdot \Delta T_{0s} = C_p \cdot (T_{02s} - T_{01}) = C_p \cdot T_{01} \cdot \left( \frac{T_{02s}}{T_{01}} - 1 \right) = C_p \cdot T_{01} \cdot \left( \left( \frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

Recordando que....

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = \frac{C_p}{C_v} \\ R = C_p - C_v \end{array} \right\} C_p = \frac{\gamma \cdot R}{\gamma - 1}$$

$$\text{Sustituyendo.... } \Delta h_{0s} = C_p \cdot T_{01} \cdot \left( \left( \frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = \frac{\gamma \cdot R \cdot T_{01}}{\gamma - 1} \cdot \left( \left( \frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

## Análisis Dimensional

Empleando la definición de la velocidad del sonido de estancamiento a la entrada de la turbomáquina ( $a_{01}$ ) nos queda:

$$\Delta h_{0s} = \frac{\gamma \cdot R \cdot T_{01}}{\gamma - 1} \cdot \left( \left( \frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = \frac{a_{01}^2}{\gamma - 1} \cdot \left( \left( \frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

$$\frac{\Delta h_{0s}}{a_{01}^2} = \frac{1}{\gamma - 1} \cdot \left( \left( \frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

$$\text{Sabido que.... } \frac{\Delta h_{0s}}{a_{01}^2} \approx \frac{\Delta h_{0s}}{N^2 \cdot D^2} \cdot \left( \frac{N \cdot D}{a_{01}} \right)^2 \approx \frac{\Delta h_{0s}}{N^2 \cdot D^2}$$

$$\text{Podemos afirmar que.... } \frac{\Delta h_{0s}}{N^2 \cdot D^2} \approx \frac{P_{02}}{P_{01}}$$

## Análisis Dimensional

Ahora trabajemos con la potencia:  $\hat{P}$

$$\hat{P} = \frac{P}{\rho_{01} \cdot N^3 \cdot D^5} = \frac{\dot{m} \cdot C_p \cdot \Delta T_0}{\rho_{01} \cdot (D^2) \cdot (N \cdot D) \cdot (N \cdot D)^2}$$

Dimensionalmente hablando

↓                      ↓  
Área                      Velocidad

Recordando que  $\dot{m} = \rho_{01} \cdot \text{Área} \cdot \text{Velocidad}$  re-escribimos  $\hat{P}$ :

$$\hat{P} = \frac{C_p \cdot \Delta T_0}{(N \cdot D)^2} \approx \frac{C_p \cdot \Delta T_0}{(N \cdot D)^2} \cdot \left( \frac{N \cdot D}{a_{01}} \right)^2 \approx \frac{\left( \frac{\gamma \cdot R}{\gamma - 1} \right) \cdot \Delta T_0}{\gamma \cdot R \cdot T_{01}} \approx \frac{\Delta T_0}{T_{01}}$$

Y finalmente podemos afirmar que...

$$\frac{P}{\rho_{01} \cdot N^3 \cdot D^5} \approx \frac{\Delta T_0}{T_{01}}$$

## Análisis Dimensional

Finalmente obtenemos:

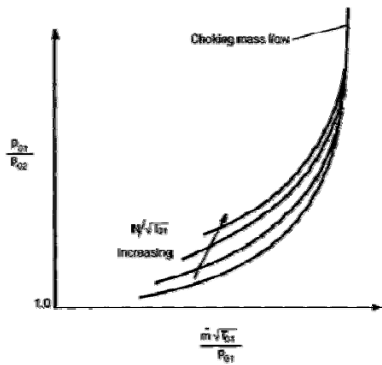
$$\frac{P_{02}}{P_{01}}, \eta, \frac{\Delta T_0}{T_{01}} = f \left( \frac{\dot{m} \cdot \sqrt{T_{01}}}{P_{01}}, \frac{\rho_{01} \cdot N \cdot D^2}{\mu}, \frac{N \cdot D}{\sqrt{T_{01}}}, \gamma \right) = f(\phi, \text{Re}, \text{Ma}, \gamma) \quad (111)$$

Para una misma máquina que opera con altos números de Reynolds y un mismo fluido se puede realizar una simplificación de los parámetros adimensionales:

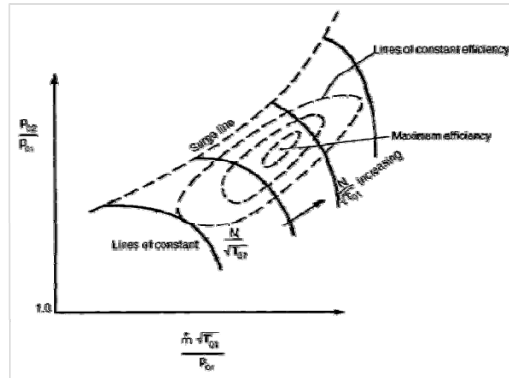
$$\frac{P_{02}}{P_{01}}, \eta, \frac{\Delta T_0}{T_{01}} = f \left( \frac{\dot{m} \cdot \sqrt{T_{01}}}{P_{01}}, \frac{N \cdot D}{\sqrt{T_{01}}} \right) = f(\phi, \text{Ma})$$

## Curvas Características TMT

A partir de la ecuación III se pueden generar las curvas características de las TMT:



Curva Característica de una Turbina



Curva Característica de un Compresor

## Otra forma de ver los Principales Números Adimensionales en la TMT

Parámetro	Formulación
Coefficiente de Flujo	$\Pi_1 = \frac{Q}{ND^3} = \frac{m}{ND^3} \propto \frac{m}{ND^2}$ o $\phi = \frac{Q}{UA} = \frac{Cm}{U}$
Coefficiente de Carga	$\Pi_2 = \frac{gH}{N^2 D^2}$ o $\frac{\Delta p}{\rho N^2 D^2}$ o $\psi = \frac{\Delta h_o}{U^2}$
Coefficiente de Potencia	$\Pi_3 = \frac{P}{\rho N^3 D^5}$ or $\frac{\Delta h_o}{h_{o1}}$
Número de Reynolds	$\Pi_4 = \frac{\rho ND^2}{\mu}$ or $Re = \frac{\rho ND}{\mu}$
Número de Mach o Relación de Velocidades	$\Pi_5 = \frac{ND}{a}$ or $Ma = \frac{U}{a_{oo}}$



## Parámetros de Forma

Agrupando los diferentes números adimensionales podemos obtener muchos otros parámetros de gran importancia. Dentro de los más importantes se encuentran aquellos en los cuales las dimensiones de la máquina  $D$  es simplificada, ya que aportan verdadera información del tipo de equipo

	$\eta_{bomb} = \frac{\Pi_1 \cdot \Pi_2}{\Pi_3} = \frac{\rho \cdot g \cdot Q \cdot H}{Pot}$		$\eta_{comp} = \frac{\Pi_1 \cdot \Pi_2}{\Pi_3} = \frac{\dot{m} \cdot \Delta h_{0s}}{Pot}$	
	$\eta_{turb} = \frac{\Pi_3}{\Pi_1 \cdot \Pi_2} = \frac{Pot}{\rho \cdot g \cdot Q \cdot H}$		$\eta_{turb} = \frac{\Pi_3}{\Pi_1 \cdot \Pi_2} = \frac{Pot}{\dot{m} \cdot \Delta h_{0s}}$	
<b>TMH</b>	$N_s = \frac{\sqrt{\Pi_1}}{\Pi_2^{3/4}} = \frac{N \cdot \sqrt{Q}}{(g \cdot H)^{3/4}}$		$N_s = \frac{\sqrt{\Pi_1}}{\Pi_2^{3/4}} = \frac{N \cdot \sqrt{\dot{m}/\rho}}{(\Delta h_{0s})^{3/4}}$	<b>TMT</b>
	$N_{sp} = \frac{\sqrt{\Pi_3}}{\Pi_2^{5/4}} = \frac{N \cdot \sqrt{Pot/\rho}}{(g \cdot H)^{5/4}}$		$N_{sp} = \frac{\sqrt{\Pi_3}}{\Pi_2^{5/4}} = \frac{N \cdot \sqrt{Pot/\rho}}{(\Delta h_{0s})^{5/4}}$	

Adicionalmente es muy usado para caracterizar el tamaño el **diámetro específico**: 
$$D_s = \frac{\Pi_2^{1/4}}{\Pi_1^{1/2}} = \frac{D(gH)^{1/4}}{\sqrt{Q}}$$

## ¿Límites de la Similitud? Compresor Centrífugo

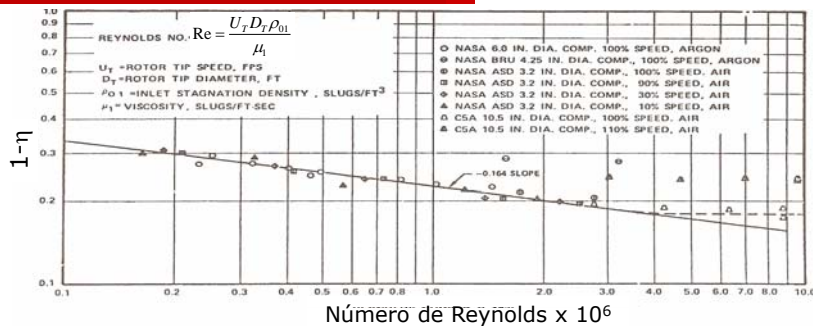


Figure 1.63. Compilation of centrifugal compressor efficiency decrement as a function of Reynolds number (Pampreen 1973, reprinted with permission of ASME).

**El Reynolds no puedes ser Escalado!!**

$$Re \downarrow \Rightarrow \eta \downarrow$$

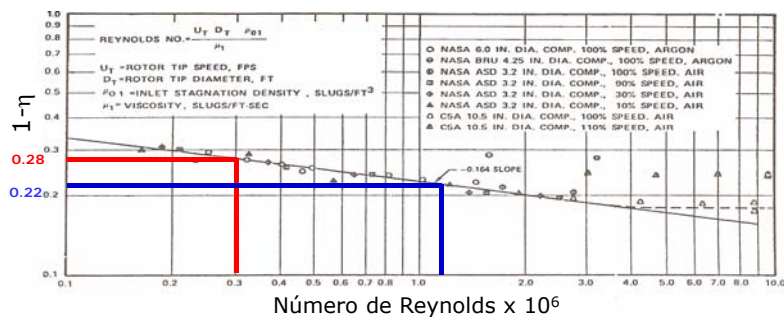
**Además:**  
 En el estudio de los modelos  
 Los valores no son "exactos" por efectos como:  
 ✓ Juegos  
 ✓ Acabados superficiales  
 ✓ Espesores  
 ✓ Etc ...

## Ejemplo

Un COMPRESOR CENTRÍFUGO es escalado al ser incrementado en diámetro por un factor de 2, manteniendo la velocidad de giro constante. El equipo padre tiene un número de Reynolds de  $0.3 \times 10^6$ . De manera aproximada ¿Cómo varía la eficiencia del compresor?

$$Re = \frac{U_T D_T \rho_{01}}{\mu_1}$$

Sí se aumenta el diámetro al DOBLE,  
Re aumenta al CUÁDRUPLE (para este caso!!!)



La Eficiencia aumenta de 72 al 78%

## Otros Números Adimensionales

### Condiciones de Referencia

En la mayoría de los casos de ensayo de TMT están basados en condiciones referidas, donde las condiciones de presión y temperatura a la entrada se expresan como relaciones con valores referenciales, de esta forma se define

$$\delta = \frac{P_{01}}{P_{0ref}} \quad \theta = \frac{T_{01}}{T_{0ref}}$$

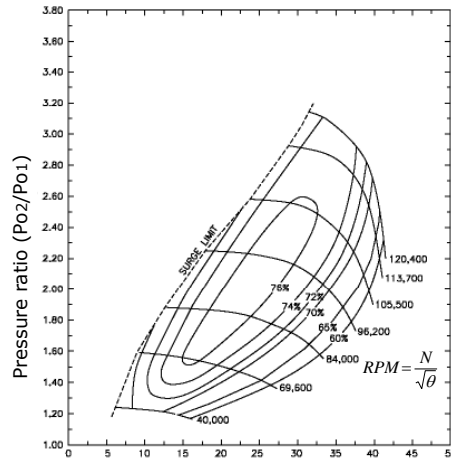
Basados en estos dos podemos reescribir los otros números adimensionales:

$$\dot{m}_r = \frac{\dot{m} \cdot \sqrt{\theta}}{\delta} \quad P_r = \frac{P}{\delta}$$

$$N_r = \frac{N}{\sqrt{\theta}} \quad T_r = \frac{T}{\theta}$$

## Mapas de Operación C.C.

→ Condiciones de Referencia



Flujo de aire  
corregido

$$\frac{m \cdot \sqrt{\theta}}{\delta} \text{ Air flow, lb/min}$$

## Ejemplo

Un compresor es probado durante primavera cuando las condiciones en la succión eran moderadas. La temperatura total en la succión es de 20 °C y la presión atmosférica es de 1 bar. Es necesario repetir las pruebas durante el invierno donde la temperatura en la succión puede ser -30 °C y la presión atmosférica cambió a 0.96 bar. *Establezca los valores correctos de  $\delta$  y  $\theta$  para corregir las nuevas condiciones a las condiciones iniciales.*

$$\delta = \frac{P_{01}}{P_{0ref}} = \frac{0.96}{1} = 0.96 \quad \theta = \frac{T_{01}}{T_{0ref}} = \frac{243.15}{293.15} = 0.82$$

Este ejercicio, en la practica, se realiza regularmente con referencia a las **condiciones ISO** (Estándar Internacionales)

# Selección

Los números adimensionales principales con los que comúnmente se hace la selección en cualquier tipo de turbomáquinas son los siguientes:

$$N_s = \frac{N \cdot Q^{0.5}}{(gH)^{\frac{3}{4}}}$$

Velocidad específica, se refiere a los requerimientos

$$D_s = \frac{D \cdot (gH)^{\frac{1}{4}}}{Q^{\frac{1}{2}}}$$

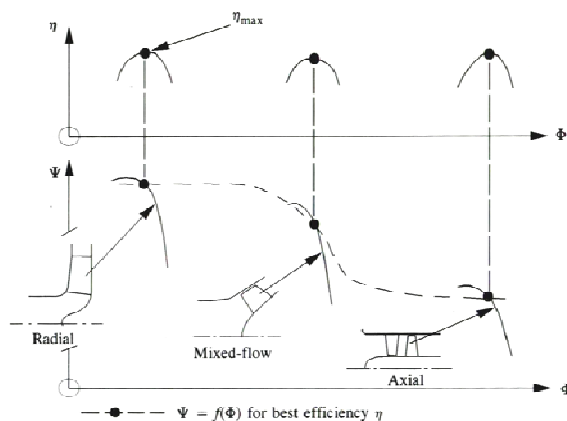
Diámetro específico, se refiere al dimensionamiento

Las unidades pueden ser:  $Q \left[ \frac{m^3}{seg} \right]$   $D [m]$   $H [m]$   $N \left[ \frac{rad}{seg} \right]$

# Construcción del diagrama de Cordier

$$\phi = \frac{1}{N_s \cdot D_s^3}$$

$$\psi = \frac{1}{N_s^2 \cdot D_s^2}$$

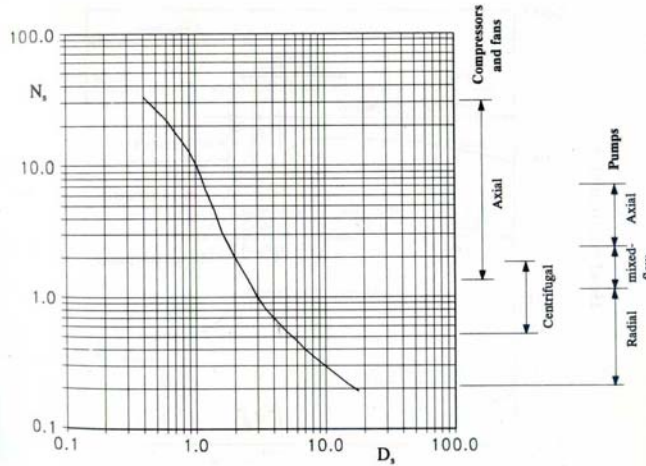


Se seleccionan el equipo que ofrece la máxima eficiencia...

## Diagrama de Cordier y Mapas de Selección

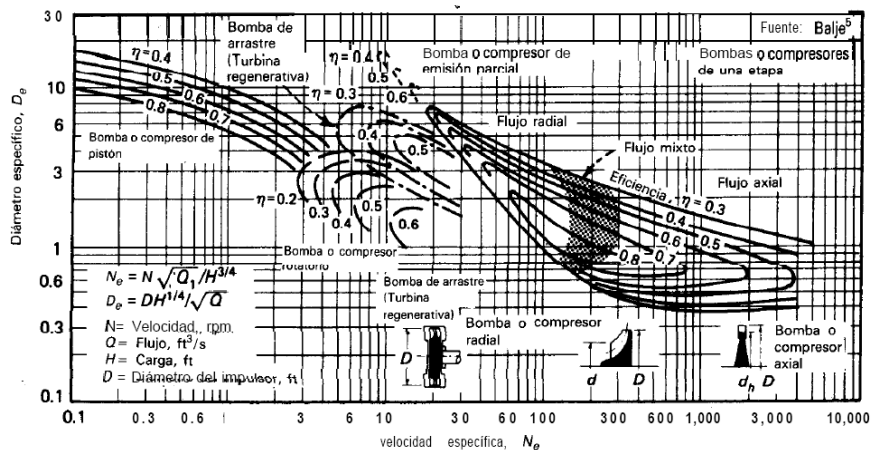
$$N_s = \frac{\phi^{1/2}}{\psi^{3/4}}$$

$$D_s = \frac{\psi^{1/4}}{\phi^{1/2}}$$



Se selecciona la maquina y se estima el tamaño de la misma para mayor eficiencia

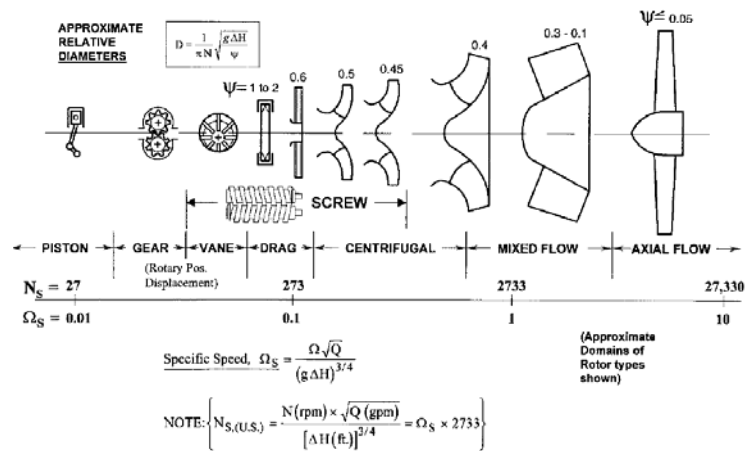
## Diagrama de Cordier y Mapas de Selección



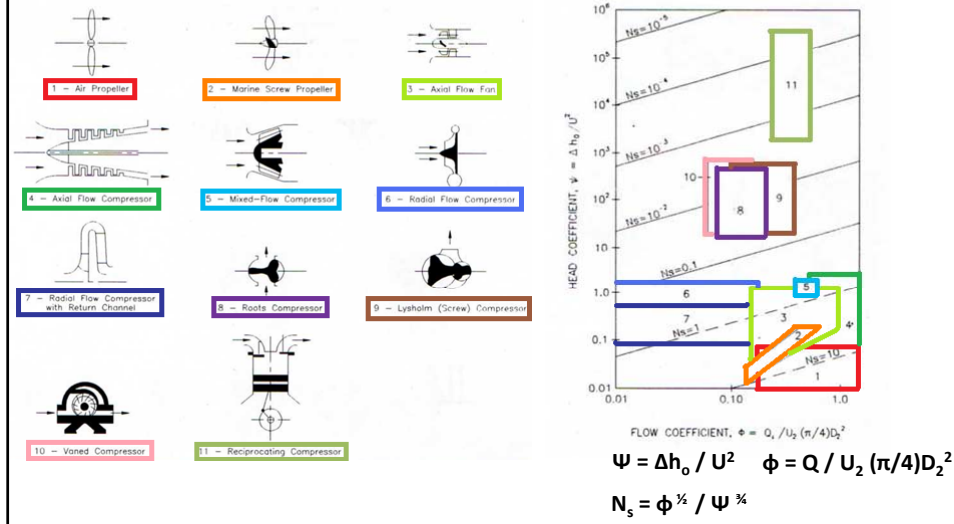
La velocidad específica y el diámetro específico permiten la selección inicial de un tipo definido de compresor de una etapa

# Selección de Máquinas Térmicas

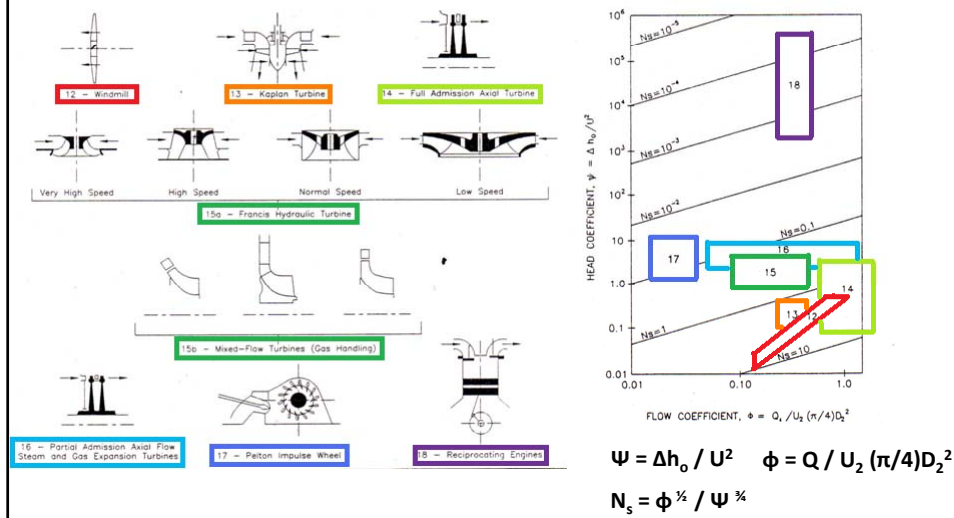
## Diagramas de Selección



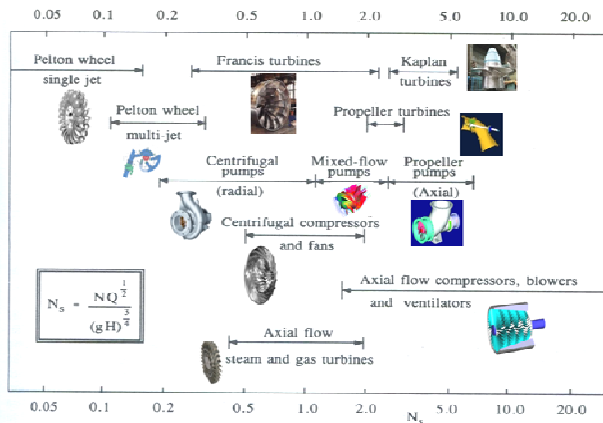
## Las Máquinas que Requieren Trabajo



## Las Máquinas que Producen Trabajo



## Diagramas de Selección



Es importante acotar que este grafico es el resultado de un complejo trabajo que se ha hecho en un largo lapso histórico, en el que se ha estudiado, analizado y probado los diferentes puntos de trabajo de las maquinas para poder establecer con que condiciones determinada maquina será mas eficiente.

## Selección / Ejemplo

Se sabe un equipo que consume trabajo maneja un  $\Delta h$  de 493.3 KJ/Kg, su velocidad periférica es de 31.41 ft/s, su caudal de 0.113 ft<sup>3</sup>/s y el diámetro del rotor es de 0.1 ft. Utilizando el diagrama de selección adecuado indique el tipo de equipo.

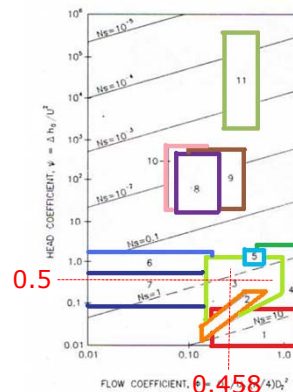
$$D_2 = 0.1 \quad U_2 = 31.41 \quad \Delta h_0 = 493.3 \quad Q = 0.113 \text{ ft}^3/\text{s}$$

$$\psi = \Delta h_0 / U^2 \quad \rightarrow \quad \psi = 0.5$$

$$\phi = Q / U_2 (\pi/4) D_2^2 \quad \rightarrow \quad \phi = 0.458$$

$$N_s = \phi^{3/4} / \psi^{3/4} \quad \rightarrow \quad N_s = 1.27$$

Por los diagramas de selección se tiene que es un ventilador de flujo axial





## Variables de desempeño de diseño local

Es muy optimista pensar que el punto de vista global toma en cuenta la complejidad de la distribución interna del flujo en una turbomáquina térmica. Por esta razón al referirse a turbomáquinas térmicas se manipulan los números Pi para crear los siguientes factores:

$$\phi = \frac{c_x}{U} \quad \text{Coeficiente de flujo}$$

$$\psi = \frac{\Delta h_o}{U^2} \quad \text{Coeficiente de carga}$$

**Este enfoque dimensional es de gran importancia para los compresores y turbinas axiales ya que los triángulos de velocidades de estas maquinas dependen en gran parte de estos números.**